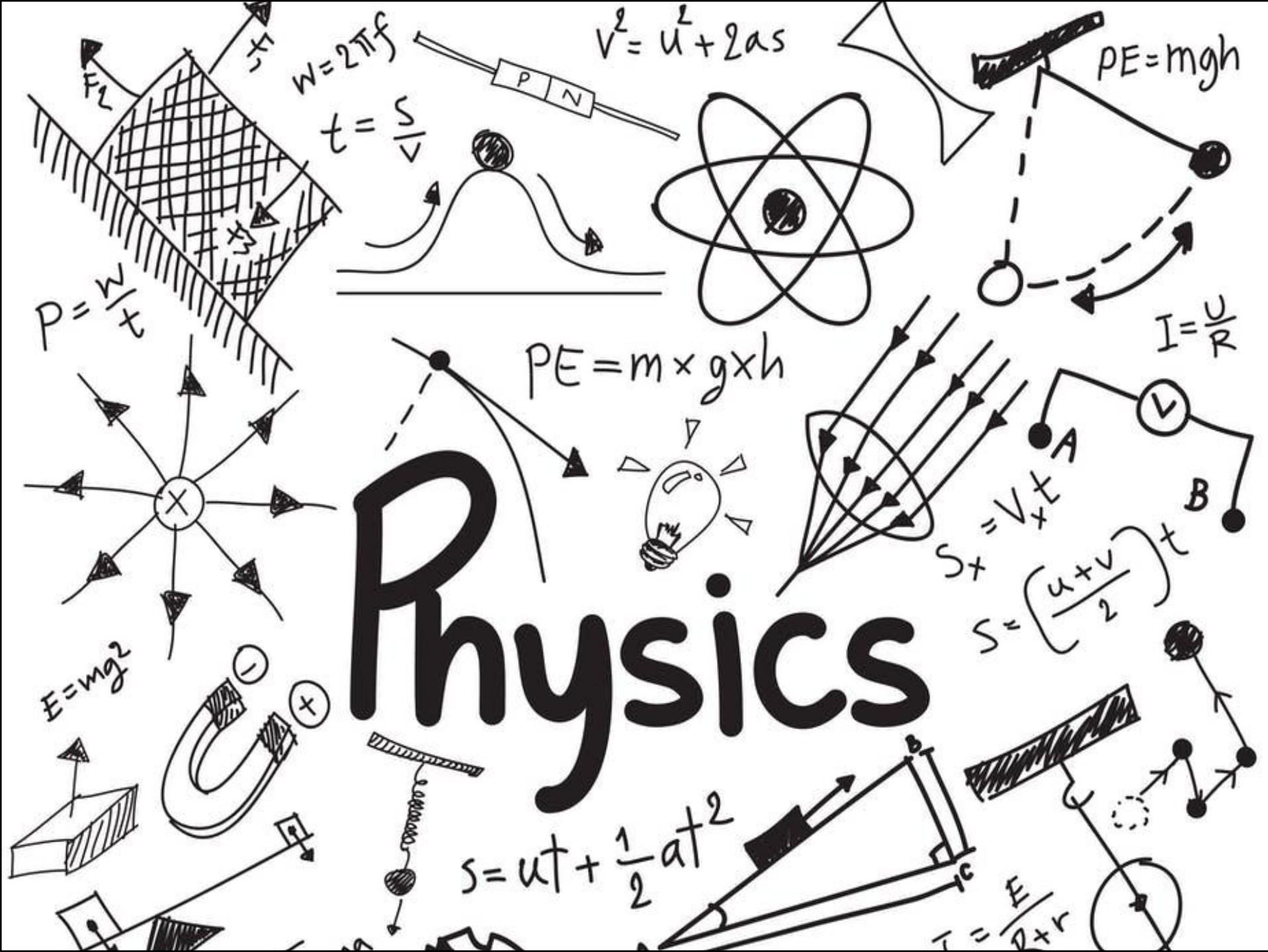


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- ◉ Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}mu^2$$

- ◉ Σχετίζεται με την κίνηση ενός συστήματος (των μελών του)
 - ◉ Είδαμε μονομελή συστήματα ως τώρα

- ◉ Έργο Δύναμης Ελατηρίου

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, και η μόνη μεταβολή στο σύστημα αφορά το μέτρο της ταχύτητάς του, το συνολικό έργο που παράγεται από αυτές στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

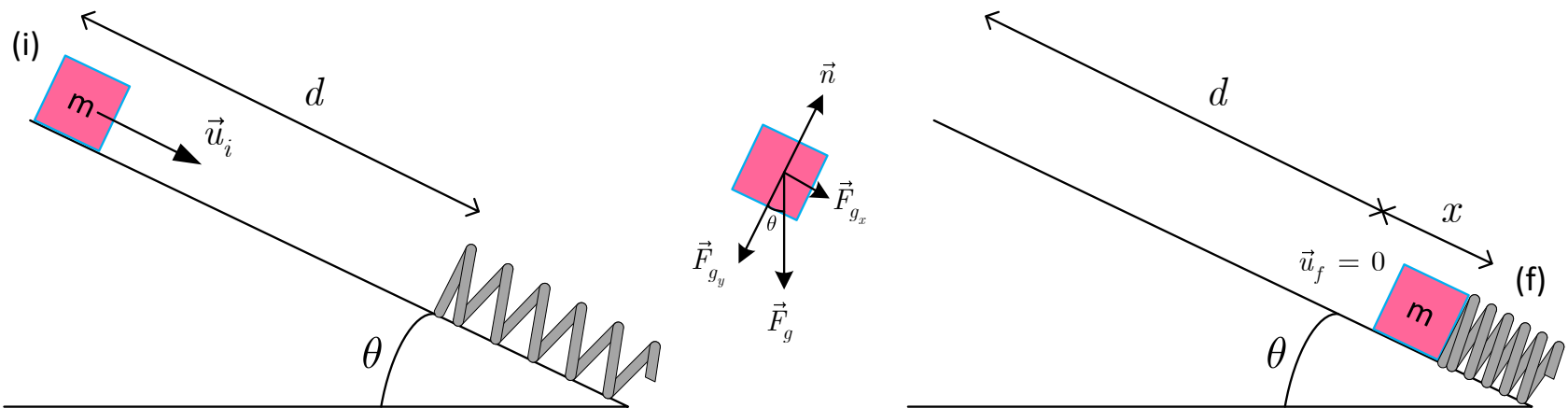
$$\Delta K = K_f - K_i = \sum W_{ext.forces}$$

- Ας το δούμε σε μια ακόμα άσκηση!

Ενέργεια Συστήματος

• Παράδειγμα:

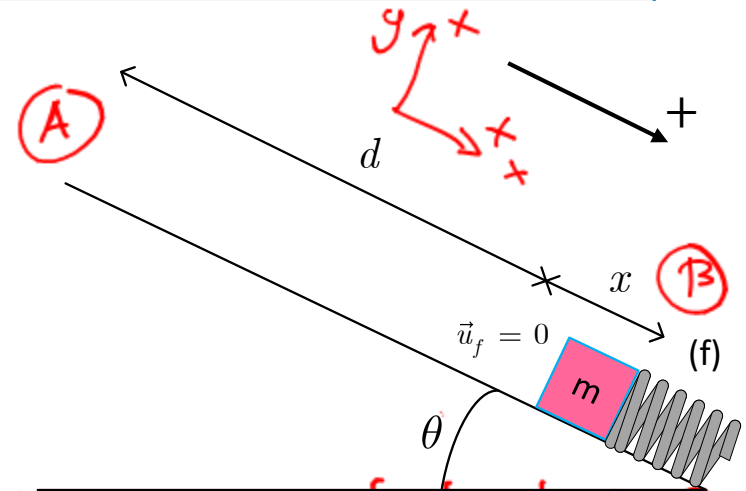
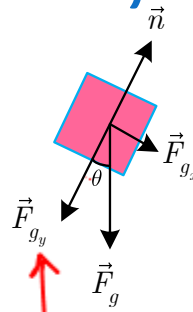
- Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

Παράδειγμα – Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το σώμα μάζας m . Οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα



είναι όλες εξωτερικές. Ισχύει το ΘΜΚΕ-Ε στη διαδρομή $A \rightarrow B$:

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{ext}} \Leftrightarrow K_B - K_A = \sum W_{\text{ext}} =$$

$$= W_{F_g} + W_n + W_s = W_{F_{gx}} + \underbrace{W_{F_{gy}}}_0 + \underbrace{W_n}_0 + W_s =$$

$$= W_{F_{gx}} + W_s = F_g \Delta x \sin \theta + W_s^0 = mg(d+x) \sin \theta + W_s$$

$$= mg(d+x) \sin \theta + \left(0 - \frac{1}{2} k x^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m u_A^2 = mg(d+x) \sin \theta - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} k x^2 - mg \sin \theta \cdot x - \left(\frac{1}{2} m u_A^2 + mg \sin \theta \cdot d \right) = 0$$

Ενέργεια Συστήματος

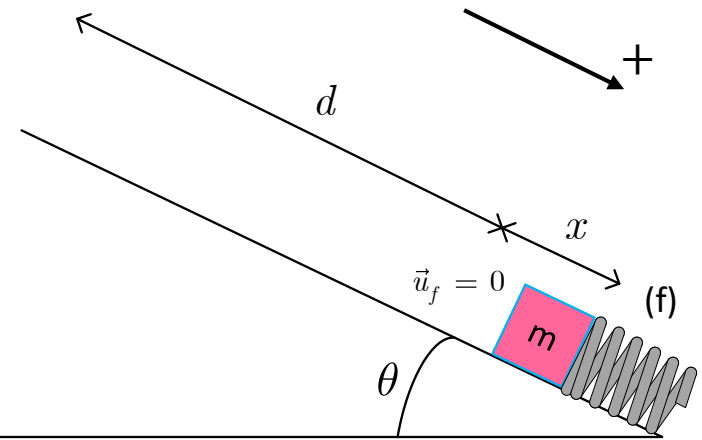
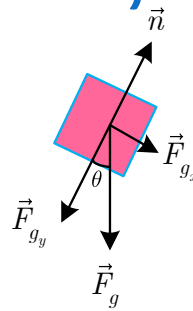
• Παράδειγμα – Λύση:

Βρίσκουμε τις ριζές του πολυωνύμου:

(Διαιρώντας το με m , για πιο "έμορφο" αποτέλεσμα)

$$x = \frac{g \sin \theta \pm \sqrt{(g \sin \theta)^2 - 4 \frac{k}{2m} \left(-\frac{u_A^2}{2} - g \sin \theta \cdot d \right)}}{2 \frac{k}{2m}}$$

Κρατάμε τη θετική λύση, αφού η θετική φορά της κίνησης είναι προς τη βάση του κεκλιμένου, όμοια με τη θετική φορά κίνησης που έχουμε επιλέξει.



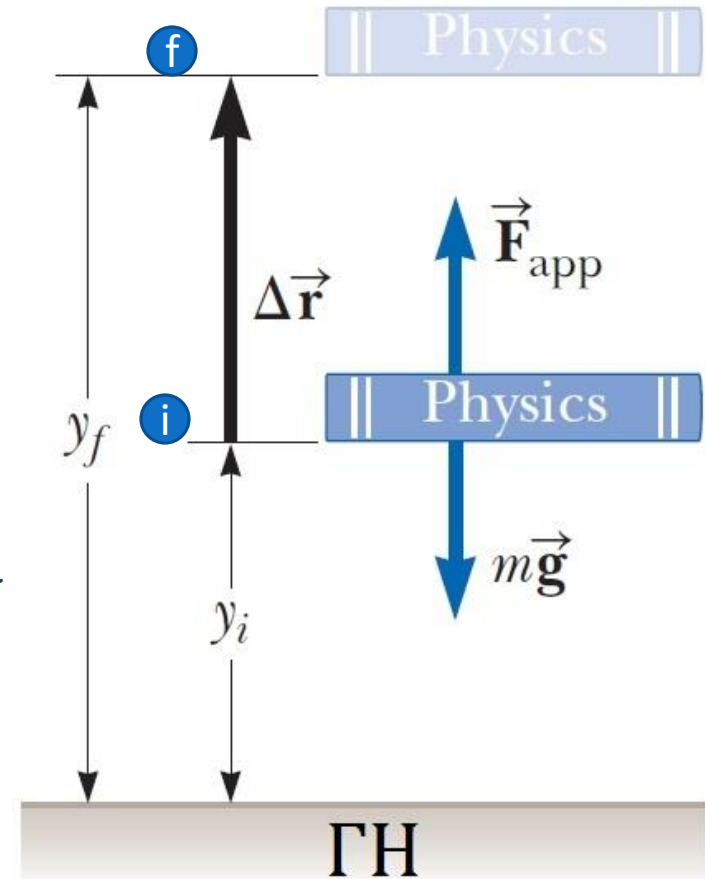
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση **εξωτερικών** δυνάμεων σε ένα σύστημα (κυρίως) **ενός** μόνο σώματος
- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα με δυνάμεις **εσωτερικές** στο σύστημα
 - Δηλ. δυνάμεις που **ΔΕΝ** ασκούνται από το εξωτερικό περιβάλλον
- Τι «ενεργειακό» νέο έχουν να μας πουν τέτοια συστήματα?

Ενέργεια Συστήματος

➡ Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Μετατοπίζουμε αργά (με σταθερή ταχύτητα) ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω δύναμης $\vec{F}_{app}$
- **Αύξηση** ενέργειας συστήματος λόγω έργου της $\vec{F}_{app}$
 - Μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα
 - Υπάρχει δύναμη, υπάρχει μετατόπιση προς τα πάνω, άρα υπάρχει μη μηδενικό, **θετικό** έργο!
- **Καμιά αλλαγή** στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης! Γιατί; Υποθέσαμε
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$
δηλ. η ταχύτητα είναι σταθερή!
- Η ενέργεια πρέπει να έχει αποθηκευτεί στο σύστημα με **άλλη μορφή**!

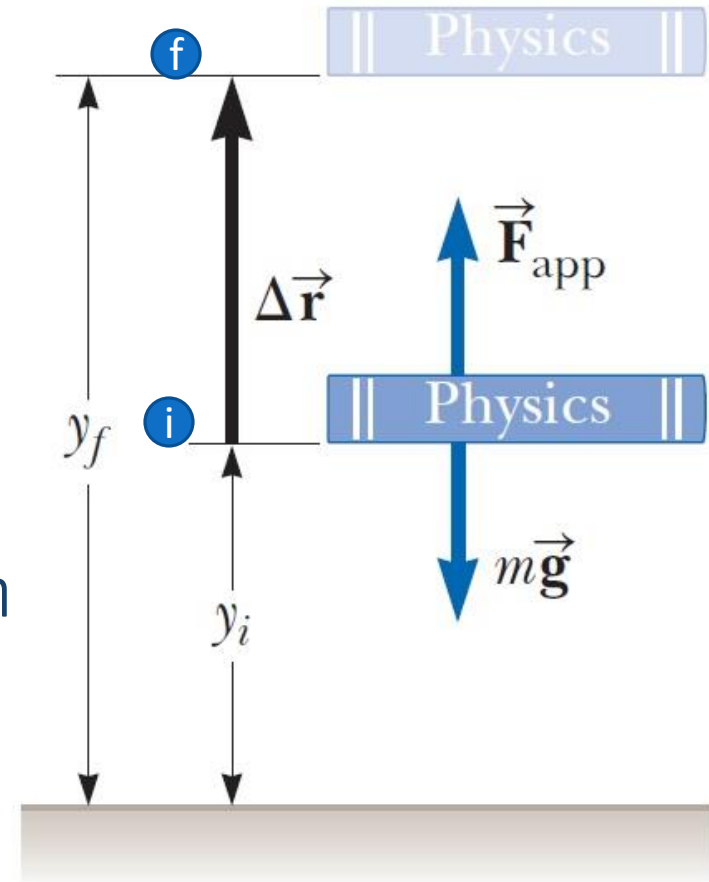


Ενέργεια Συστήματος

➡ Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Αν αφήσουμε όμως το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει **κινητική ενέργεια!**
 - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
 - Προέρχεται από το έργο της δύναμης $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του νωρίτερα
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει λέγεται

βαρυτική δυναμική ενέργεια



Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

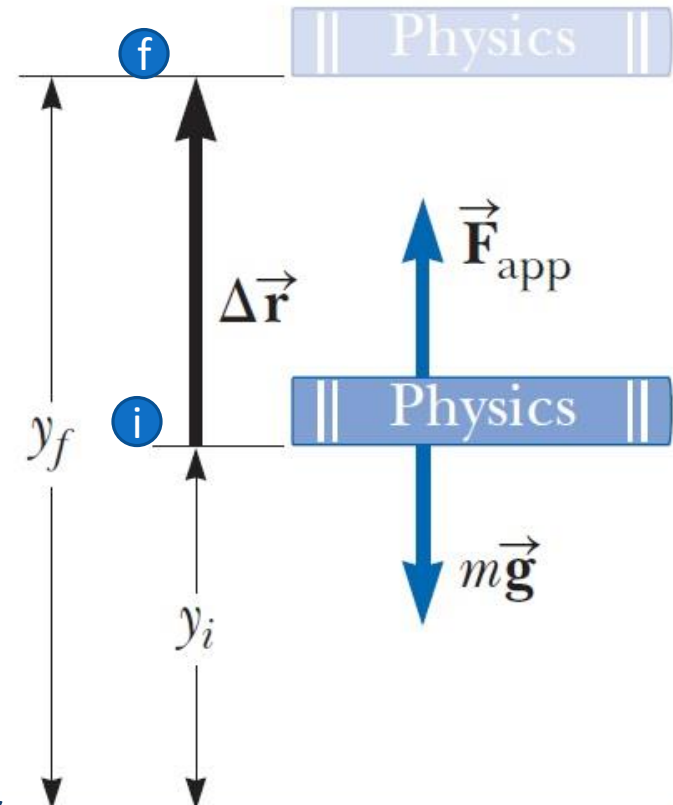
- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \vec{F}_{app} \cdot \Delta \vec{r} = -m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_f - mgy_i \\ &= U_{gf} - U_{gi} = \Delta U_g \end{aligned}$$

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**

$$U_g = mgy$$

- Το **έργο της εξωτ. δύναμης** κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με τη **μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια** του συστήματος Γη-σώμα!



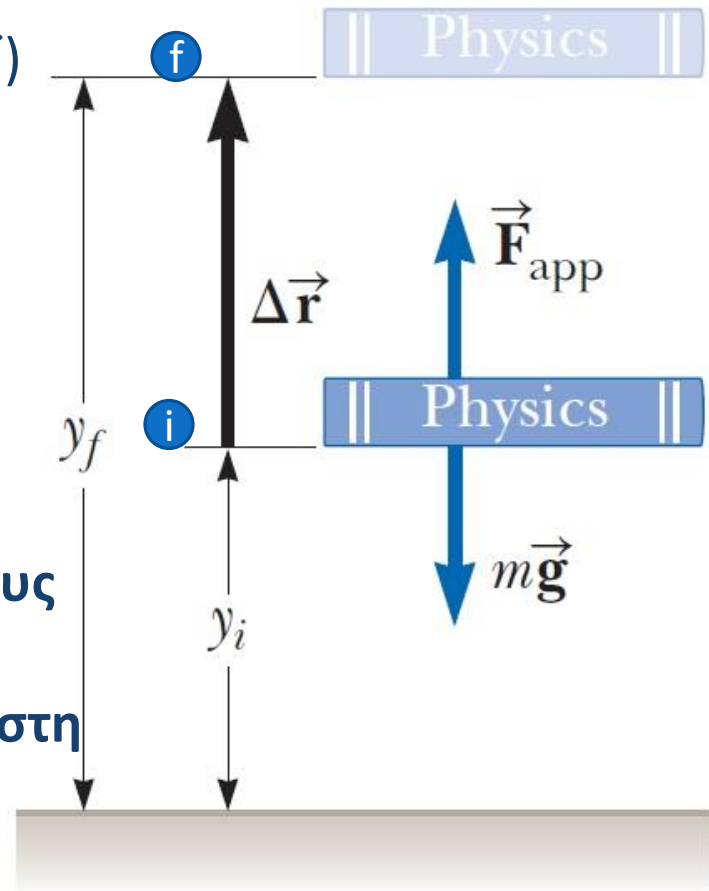
Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{F_g} &= \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r} = m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_i - mgy_f \\ &= U_{gi} - U_{gf} = -\Delta U_g \end{aligned}$$

- Άρα το **έργο της δύναμης του βάρους** κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με την **αρνητική μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια** του συστήματος Γη-σώμα!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**

- Είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με **μεταβολή της κινητικής του ενέργειας**, που μεταφράζεται σε **κίνηση** των μελών του συστήματος
- Στην προηγούμενη περίπτωση, είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως **μεταβολή της δυναμικής ενέργειας** στο σύστημα, που αναπαριστά αλλαγή στη

διάταξη / διαμόρφωση / σύνθεση

των μελών του συστήματος.

- Εν προκειμένω, το βιβλίο ανυψώθηκε σε σχέση με την επιφάνεια της Γης (άλλαξε η μεταξύ τους «διάταξη»)

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια **διάταξη των μελών** του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** θεωρείται **μηδενική**
- Για παράδειγμα, όταν τα σώματα βρίσκονται **ακριβώς πάνω** στην επιφάνεια της Γης.
 - Τότε θεωρούμε ότι η **βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος {Γη-σώματα}** είναι **μηδενική**
 - Οποιαδήποτε **μεταβολή** στο **ύψος** κάποιου σώματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης οδηγεί σε **μεταβολή** της **βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** του συστήματος
- Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια άλλης μορφής δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Πίσω στο ελατήριο! 😊

- Σύστημα: ελατήριο + σώμα (όχι μόνο σώμα!)

- Διμελές σύστημα!
- Δύναμη ελατηρίου: **εσωτερική** στο σύστημα

- Είδαμε νωρίτερα ότι

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 = -W_s$$

- Το **έργο** που παράγεται στο σύστημα **εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου**
 - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα αν θεωρήσουμε ότι

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$

τότε

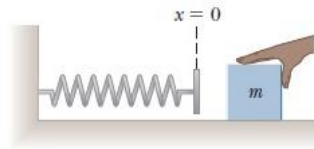
$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \\ &= U_s^f - U_s^i = \Delta U_s = -W_s \end{aligned}$$

με U_s την

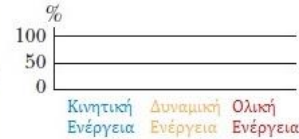
ελαστική δυναμική ενέργεια

που σχετίζεται με το σύστημα σώματος-ελατηρίου

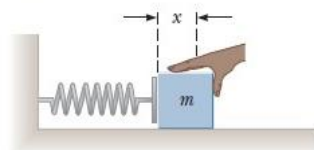
Ενέργεια Συστήματος



Πριν το ελατήριο συμπιεστεί, δεν υπάρχει ενέργεια στο σύστημα ελατηρίου-σώματος.



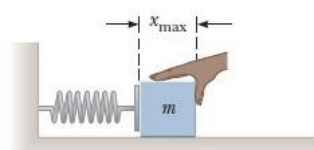
a



Όταν το ελατήριο συμπιέζεται μερικώς, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική ενέργεια.



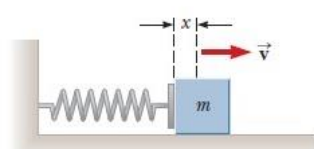
b



Το ελατήριο συμπιέζεται στο μέγιστο βαθμό, και το σώμα κρατείται σταθερό. Υπάρχει ελαστική δυναμική ενέργεια στο σύστημα και καθόλου κινητική ενέργεια.



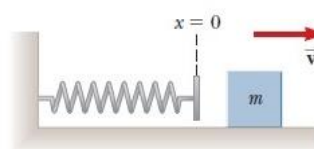
c



Αφού αφήνεται ελεύθερο το σώμα, η ελαστική δυναμική ενέργεια μειώνεται και η κινητική ενέργεια αυξάνεται.



d



Αφού το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι κινητική ενέργεια.



e

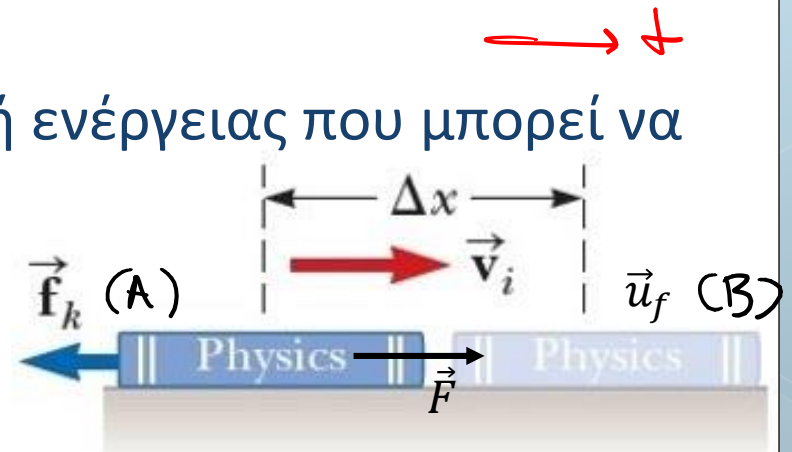
Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή.

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα

- Σύστημα == βιβλίο



- Σταθερή δύναμη $\vec{F}$

- Σταθερή επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx

- Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (Μοντέλο I) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (Μοντέλο II):

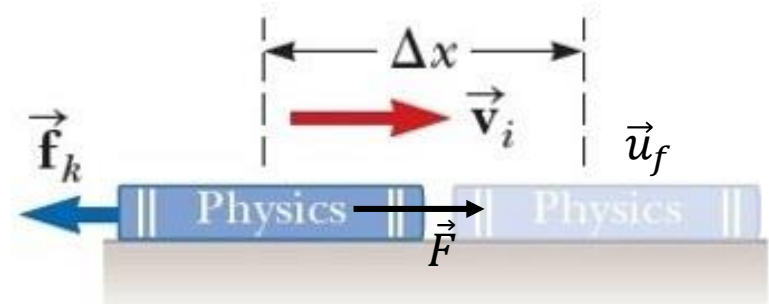
$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = ma$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\Delta x} (u_f^2 - u_i^2)$$

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος

- Σύστημα == βιβλίο



$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

- Πού πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της $\vec{F}$??
- Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

- Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος
{βιβλίο + επιφάνεια}

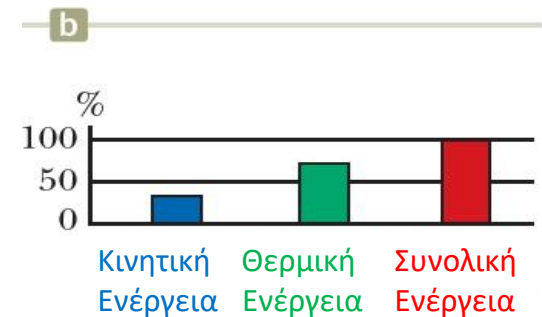
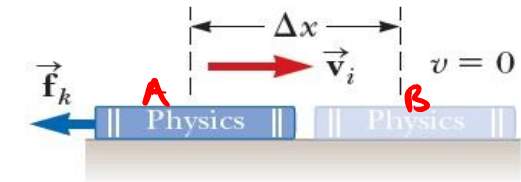
Ενέργεια Συστήματος

- Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε σε **θερμική ενέργεια** του συστήματος {βιβλίο και επιφάνεια} (όχι μόνο βιβλίο!)
 - Η επιφάνεια και το βιβλίο θερμάνθηκαν!
- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **θερμική ενέργεια**, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\Delta E_{th} = -W_{\tauριβης} = f_k \Delta x$$

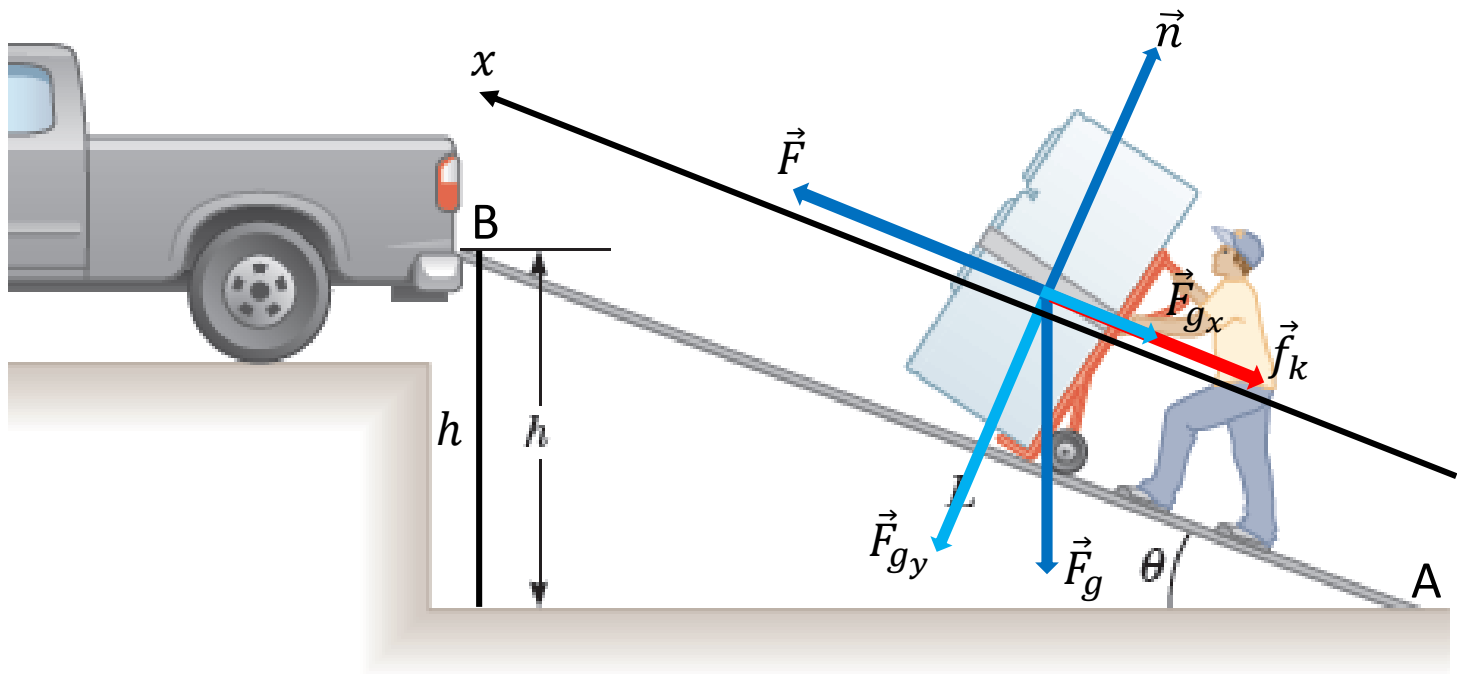


Ενέργεια Συστήματος

• Παράδειγμα (revisited):

- Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του με σταθερή ταχύτητα σε ένα φορτηγό χρησιμοποιώντας μια ράμπα με τριβές υπό γωνία θ όπως στο Σχήμα. Ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας L αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς.

$$\Sigma F_x = 0$$



Ενέργεια Συστήματος

• Παράδειγμα – Λύση:

Σύστημα f_k το {ψυγείο}.

Οι δυνάμεις που του ασκούνται φαίνονται στο σχήμα. Ισχύει το ΘΜΚΕ-Ε στη διαδρομή $A \rightarrow B$:

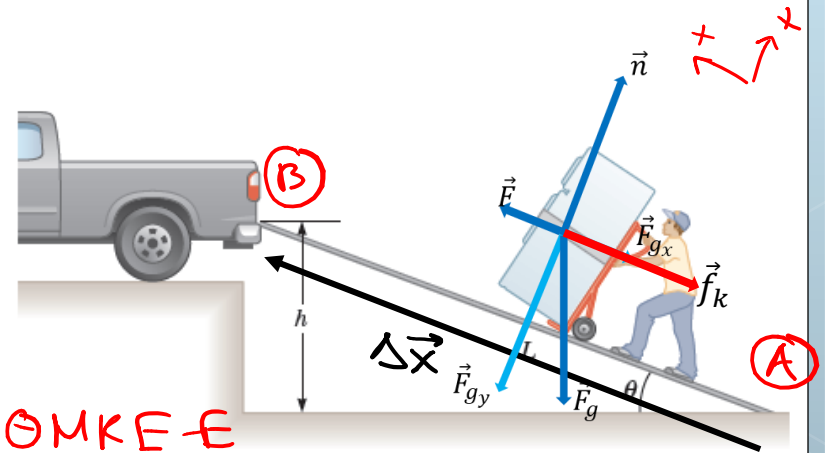
$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{ext}}$$

$$0 = W_{F_{gx}} + W_{f_k} + W_F$$

Άρα $W_F = -W_{f_k} - W_{F_{gx}} \rightarrow -mgh$

$$\hookrightarrow f_k \cdot \Delta x \cdot \cos(\varphi) = f_k \Delta x \cos(\pi) = -f_k \Delta x$$

Οπότε $W_F = f_k L + mgh$!



{ "φ" είναι η γωνία μεταξύ $\vec{f}_k$ και $\Delta \vec{x}$ }

Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:

Επειδή το ψυχείο ισορροπεί στον άξονα γ'γ, ισχύει ο 1ος Νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{gy} = \vec{0} \Rightarrow n - F_{gy} = 0 \Leftrightarrow n = F_{gy} = mg \cos \theta. \textcircled{1}$$

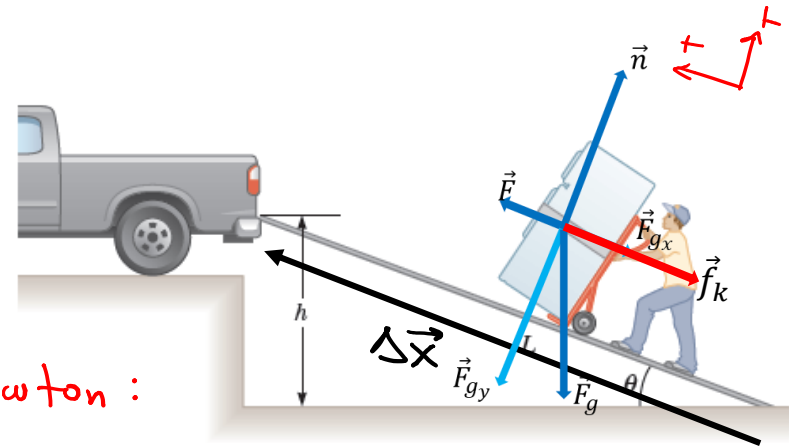
≡ έραφε ότι

$$f_k = \mu_k n \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mu_k mg \cos \theta \textcircled{2}$$

Άρα

$$W_F \stackrel{\textcircled{2}}{=} \mu_k mg \cos \theta \cdot L + mgh = mg (\mu_k L \cos \theta + h).$$

Παρατηράμε ότι πράγματι το έργο του $\vec{F}$ εξαρτάται από το μήκος του κεκλιμένου αυτή τη φορά!



Συνεχίζεται... 😊